

PROBLEMA 1.1.1

En la figura P1.1.1 se muestra un circuito con un interruptor S que une y desconecta la pila de 10 V al sistema formado por una resistencia y tres condensadores $C = 1 \mu\text{F}$.

Calcular la carga de los condensadores cuanto S está cerrado.

¿Qué ocurre cuando se abre el interruptor S?

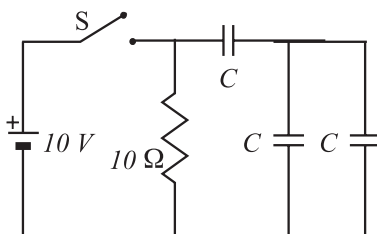


Figura P1.1.1

Solución

Los dos condensadores de la derecha están en paralelo, por tanto son equivalentes a un condensador de capacidad $C' = 2C = 2 \times 10^{-6}$ F. El otro condensador C está en serie con C' , luego la carga que tienen ambos es la misma, Q .

Cuando está cerrado el interruptor S, a los dos condensadores se les aplica una tensión de 10V, en consecuencia,

$$10 = \frac{Q}{C} + \frac{Q}{C'} = Q \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C} \right) = Q \frac{3}{2C}$$

Despejando obtenemos Q ,

$$Q = 10 \frac{2}{3} C = \frac{2}{3} 10^{-5} \text{ [C]}$$

La carga Q se distribuye entre los condensadores en paralelo proporcionalmente a su capacidad, como en este caso son iguales, a cada uno le corresponde la mitad de la carga Q ,

$$Q_p = \frac{1}{2} Q = \frac{1}{3} 10^{-5} \text{ [C]}$$

¿Qué ocurre cuando se abre el interruptor S?

Los tres condensadores descargan las correspondientes cargas a través de la resistencia de 10Ω . La capacidad equivalente de los condensadores C y C' es:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C} + \frac{1}{2C} = \frac{3}{2C} \rightarrow C_e = \frac{2}{3} C$$

Transcurrido un tiempo $RC_e = (2/3) 10^{-5}$ s, llamado constante de tiempo (véase constante de tiempo apartado 10.2.3, página 334, *Física para informática*. V. López y M.M. Montoya), los tres condensadores quedan prácticamente descargados.

PROBLEMA 1.1.2

Dado el circuito de la figura P1.1.2, calcular la corriente que atraviesa cada batería. Indicar qué batería suministra energía y cuál la recibe.

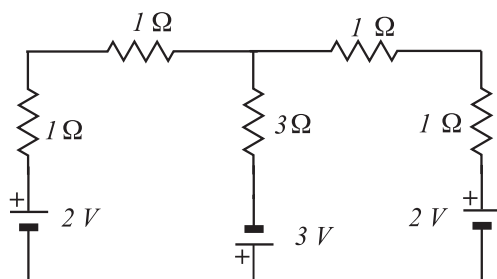


Figura P1.1.2

Solución

Para determinar qué baterías suministran energía, debemos obtener las corrientes que suministran. En primer lugar vamos a plantear las ecuaciones de malla suponiendo que las corrientes en cada lazo tiene sentido horario,

$$\begin{aligned} 2 + 3 &= (1 + 1 + 3) I_1 - 3I_2 & 5 &= 5I_1 - 3I_2 \\ -2 - 3 &= -3I_1 + (1 + 1 + 3) I_2 & -5 &= -3I_1 + 5I_2 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones tendremos las corrientes. Por el método de Cramer,

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8} ; I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}} = -\frac{10}{16} = -\frac{5}{8}$$

La corriente real en el lazo segundo tiene sentido contrario al supuesto para I_2 .

En la rama común,

$$I_c = I_1 - I_2 = \frac{5}{8} + \frac{5}{8} = \frac{5}{4}$$

La corriente en la rama común tiene el mismo sentido que I_1 .

Dado el sentido de las corrientes que atraviesan las tres pilas, podemos afirmar que las tres suministran energía, ya que en cada una la corriente entra por el polo negativo y sale por el positivo.

PROBLEMA 1.1.3

Tenemos una barra semiconductor de tipo p , de longitud $l = 10$ cm y sección cuadrada de lado $a = 1$ cm. La densidad de portadores es: $p = 0,725 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ y $n = 0,290 \times 10^6 \text{ cm}^{-3}$.

Se efectúa una nueva difusión de impurezas de manera que el dopado final es $N'_A = 1,01 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$.

¿Cuál es la resistencia de la barra antes y después de la difusión?. Explicar los resultados.

Movilidades: $\mu_p = 475 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$; $\mu_n = 1500 \text{ cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. Carga $q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

Solución

La resistencia de la barra viene dado por la relación,

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{l}{S} = \frac{1}{\gamma} \frac{10^{-1}}{(10^{-2})^2} = \frac{1}{\gamma} 10^3 \quad [\Omega]$$

Debemos calcular la conductividad, que en un semiconductor se obtiene mediante la siguiente relación,

$$\gamma = e (n\mu_n + p\mu_p)$$

1) *Antes del dopado*

Sustituyendo los valores respectivos en la ecuación anterior tenemos,

$$\gamma_1 = 1,6 \times 10^{-19} \left(0,290 \times 10^6 \times 1500 + 0,725 \times 10^{15} \times 475 \right) \left[\text{C} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

Pasando los centímetros a metros y operando tenemos que,

$$\gamma_1 = 1,6 \times 10^{-17} \left(435 \times 10^6 + 344,38 \times 10^{15} \right) \left[\text{C} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

Podemos observar que la parte correspondiente a los portadores tipo n es nueve ordenes de magnitud inferior al correspondiente a los de tipo p , por tanto su contribución a la conductividad es despreciable, en consecuencia,

$$\gamma_1 \simeq 551 \times 10^{-2} \quad (\Omega \cdot \text{m})^{-1} \simeq 5,51 \quad [(\Omega \cdot \text{m})^{-1}]$$

La resistencia de la barra será,

$$R_1 = \frac{10^3}{551 \times 10^{-2}} \simeq 181,5 \quad [\Omega]$$

2) *Después del dopado*

Ahora se aumenta los portadores tipo p , por tanto la conductividad está determinada por $N'_A = 1,01 \times 10^{17}$.

$$\gamma_2 = 1,6 \times 10^{-17} (N'_A \times 475) \simeq 1,6 \times 10^{-17} (1,01 \times 10^{17} \times 475) \left[\text{C} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \right]$$

$$\gamma_2 \simeq 767,6 \quad [(\Omega \cdot \text{m})^{-1}]$$

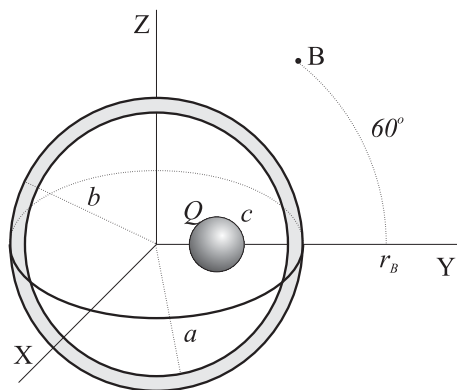
La conductividad se ha incrementado considerablemente, y como consecuencia la resistencia disminuye,

$$R_2 \simeq \frac{10^3}{767,6} \simeq 1,303 \quad [\Omega]$$

PROBLEMA 1.2.1

Tenemos una capa esférica metálica de radio interior a y exterior b . Dentro del volumen limitado por la capa, y dispuesta como indica la figura P1.2.1 tenemos una esfera de radio c ($c \ll a$) con una carga Q .

1) ¿Se puede calcular fácilmente el campo eléctrico en el punto B?. Razonar la respuesta. En caso afirmativo calcular \mathbf{E} en B.

**Figura P1.2.1****Solución**

La respuesta es **SI**. La capa esférica metálica, de radio interior a y exterior b , "apantalla" los efectos derivados de la posición de la esfera de radio c y carga Q . El campo en exterior de la capa metálica es el debido a una carga Q distribuida uniformemente por la superficie de radio b . Con estas condiciones y aplicando el teorema de Gauss sobre una esfera de radio r_B calculamos el campo eléctrico en el punto B.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r 4\pi r_B^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_B^2}$$

El campo eléctrico tiene el mismo módulo sobre la esfera de radio r_B . Su dirección y sentido es radial y hacia el exterior de la esfera.

PROBLEMA 1.2.2

En el plano YZ tenemos unos conductores por los que circula una corriente I (véase la figura P1.2.2). El sistema se puede asimilar a un conductor rectilíneo e indefinido más una circunferencia de radio a y centro en O, ambos están en el plano YZ.

Calcular el campo magnético en O.

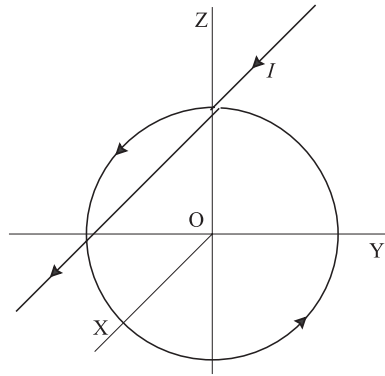


Figura P1.2.2

Solución

La solución se obtiene sumando vectorialmente los resultados correspondientes a una circunferencia de radio a , recorrida por una corriente I , y un conductor rectilíneo e indefinido, situado a una distancia d del origen O , recorrido por una corriente I .

Circunferencia

Aplicamos los resultados del ejemplo 6.2, ecuación (6.15) de la página 223 del libro *Física para informática* V.López y M.M. Montoya. En nuestro caso el eje perpendicular al plano de la circunferencia es el eje X , y el radio ahora es a ; por tanto, dado que el sentido de la corriente es contrario al de las agujas del reloj,

$$\mathbf{B}_1 = \frac{\mu_o I}{2a} \mathbf{u}_x$$

Tramo rectilíneo

El hilo forma un ángulo $\pi/4$ con los ejes Z e Y . La distancia del hilo a O es,

$$d = a \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizamos los resultados del ejemplo 6.1, ecuación (6.13), página 221 del libro citado anteriormente.

En este caso $R = d = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, y dado el sentido de la corriente en el hilo, $\mathbf{u}_\varphi = \mathbf{u}_x$. Por tanto, el campo magnético correspondiente es,

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{2\pi a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \mathbf{u}_x = \frac{\mu_o I}{2\pi a} \sqrt{2} \mathbf{u}_x$$

El campo magnético en el punto O será,

$$\mathbf{B}_T = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 = \frac{\mu_o I}{a} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \right) \mathbf{u}_x$$

PROBLEMA 1.2.3

Dado el circuito indicado en la figura P1.2.3, calcular el módulo y la fase de la corriente que atraviesa el condensador C_1 . Representar la corriente tomando como referencia la tensión en el generador.

$\omega = 10^5 \text{ s}^{-1}$ $V = 10\angle 0$ voltios. $L = 0,5 \text{ mH} = 5 \times 10^{-4} \text{ H}$. $C_1 = 0,2 \mu\text{F} = 2 \times 10^{-7} \text{ F}$. $C_2 = 0,1 \mu\text{F} = 10^{-7} \text{ F}$.

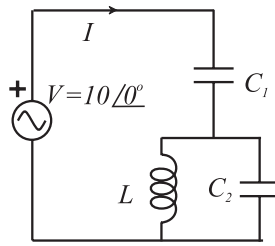


Figura P1.2.3

Solución

Para calcular la corriente empezamos por obtener los valores de las reactancias inductivas y capacitivas.

$$X_L = \omega L = 10^5 \times 5 \times 10^{-4} = 50$$

$$X_{C1} = -\frac{1}{\omega C_1} = -\frac{1}{10^5 \times 2 \times 10^{-7}} = -50 \quad , \quad X_{C2} = -\frac{1}{\omega C_2} = -\frac{1}{10^5 \times 10^{-7}} = -100$$

$$\mathbf{Z}_L = j50 \, \Omega \quad ; \quad \mathbf{Z}_{C1} = -j50 \, \Omega \quad ; \quad \mathbf{Z}_{C2} = -j100 \, \Omega$$

Las impedancia \mathbf{Z}_L y \mathbf{Z}_{C2} están en paralelo, por tanto su impedancia equivalente se calcula de la forma siguiente,

$$\frac{1}{\mathbf{Z}_1} = \frac{1}{\mathbf{Z}_L} + \frac{1}{\mathbf{Z}_{C2}} = \frac{1}{j50} + \frac{1}{-j100} = -\frac{j}{100}$$

$$\mathbf{Z}_1 = -\frac{100}{j} = j100 \, \Omega$$

La impedancia \mathbf{Z}_1 está en serie con \mathbf{Z}_{C1} , por tanto el generador se aplica a estas dos impedancias en serie, y la corriente que pasa por el condensador C_1 es:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_{C1}} = \frac{10}{j100 - j50} = \frac{1}{j5} = -j0,2 \quad [\text{A}]$$

El módulo de la corriente es:

$$I = 0,2 \quad [\text{A}]$$

La fase,

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \quad [\text{radianes}]$$

La representación de \mathbf{I} en el plano complejo es un vector que une el origen con el punto $(0, -0,2)$ sobre el eje imaginario (eje Y en el plano XY).